การพัฒนาความคิดแบบควอนตัม

ดร. หัสชัย สิทธิรักษ์ *

ในโลกของอะตอมและองค์ประกอบของอะตอม ค่าทุกอย่างคิดในรูปของกลุ่มก้อนของสิ่งที่เล็กย่อยที่สุด เรียกว่าควอนตัม ควอนตัมเป็นภาษาลาตินแปลว่ามากหรือเป็นกลุ่มก้อน ในทุกอะตอมมีมวล ประจุไฟฟ้า พลังงาน โมเมนตัม และอื่นๆ มองในรูปของควอนตัม ไม่มีอะไรในโลกที่เป็นค่าต่อเนื่องดังที่ใช้ในกลศาสตร์ยุคเก่า เช่นเรื่องของกลศาสตร์การเคลื่อนที่ ดังนั้นกลศาสตร์ควอนตัมจึงเป็นสาขาของวิทยาศาสตร์ที่กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุเล็กๆในระดับอะตอมและเล็กกว่าอะตอม

ปัญหามากที่สุดต่อผู้ที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ควอนตัมมาจากจิตที่รับรู้ได้ ที่คิดว่าทุกอย่างรับรู้ได้ และคิดว่าน่าจะเป็นเหมือนกันทั้งในโลกของควอนตัมและในโลกวัตถุปกติธรรมดาที่เรามีประสบการณ์ การสังหรณ์ว่าสิ่งต่างๆควรจะมีพฤติกรรมเป็นอย่างไรนั้นขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของเรา ดังเช่นวัตถุขนาดใหญ่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามปกติ ไม่มีเหตุผลใดที่จะคาดหวังเมื่อเรามองที่วัตถุขนาดเล็กมากหรือวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงมากแล้ว วัตถุนั้นก็ควรจะมีพฤติกรรมเหมือนกับวัตถุที่เราคุ้นเคยโดยทั่วๆไป

ในโลกของควอนตัมไม่สามารถที่จะสังเกตอะไรบางอย่างโดยไม่มีผลต่อสิ่งที่สังเกตได้เลย ในกลศาสตร์ของนิวตันเรากำหนดได้ว่าเราสังเกตบางอย่างเช่นลูกบิลเลียดหรือโลกที่อยู่ของเราเอง โดยที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงสิ่งที่สังเกตนั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อเรามองไปยังลูกบิลเลียดนั้น คลื่นแสงที่สะท้อนจากผิวของลูกบิลเลียดมาเข้าตาเรานั้นมีปริมาณน้อยมาก จนเราเชื่อมั่นได้ว่าไม่มีผลใดๆเลยกับลูกบิลเลียด ในโลกควอนตัมนั้นหนทางที่จะสังเกตอิเลคตรอนได้ก็โดยการให้อิเลคตรอนชนกับอิเลคตรอนอื่นและดูผลการสะท้อน ในกระบวนการที่เราสังเกตอิเลคตรอน ซึ่งจะมีผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นกับอิเลคตรอนที่ถูกสังเกตอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

หลักความไม่แน่นอนของไฮเซ็นเบิร์กเป็นส่วนหนึ่งของวิชากลศาสตร์ควอนตัม ตั้งขึ้นโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันชื่อเวิร์นเนอร์ ไฮเซ็นเบิร์ก เป็นคนแรกที่ได้ตระหนักถึงธรรมชาติการสังเกตในกลศาสตร์ควอนตัม หลักการนี้มีสาระสำคัญที่วัตถุทางควอนตัมหรืออนุภาคนั้นไม่สามารถที่จะสังเกตได้โดยปราศจากการเปลี่ยนแปลง จึงเป็นไปไม่ได้ที่จะวัดค่าได้แน่นอนสองอย่างพร้อมกันในขณะเดียวกัน ตัวอย่างเช่นเราไม่สามารถที่จะทราบได้ชัดเจนทั้งตำแหน่งและความเร็วของวัตถุระดับอะตอมได้ตามเวลาที่กำหนด ยิ่งทราบค่าตำแหน่งได้ละเอียดเท่าใดจะยิ่งไม่สามารถหาค่าความเร็วที่เคลื่อนที่ให้แน่นอนเท่านั้น และในทางที่กลับกันเมื่อทราบความเร็วได้ละเอียดก็จะไม่สามารถหาตำแหน่งของอนุภาคนั้นได้ให้ละเอียดแน่นอนเช่นกัน

หลักการความไม่แน่นอนของไฮเซ็นเบิร์กเขียนอยู่ในรูปที่สั้นกระทัดรัดได้คือ

$$\Delta x \Delta v = h/m$$

เมื่อ Δx เป็นค่าความไม่แน่นอนในการวัดค่าตำแหน่ง

Δv เป็นค่าความไม่แน่นอนในการวัดค่าความเร็ว

h มีค่าเป็นตัวเลขเรียกว่าค่าคงที่ของแพลงค์ และ

m เป็นค่ามวลของอนุภาค

* อาจารย์คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏนครศรีธรรมราช

หลักความไม่แน่นอนไม่ได้กล่าวว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะวัดค่าให้ละเอียดได้ในโลกของควอนตัม แต่กล่าวไว้ว่าเป็นทางเลือกที่จะวัดอย่างใดอย่างหนึ่งให้ละเอียดนั้นจะต้องให้ความสนใจทำความเข้าใจในเรื่องนี้ให้ลึกซึ้ง หรือกล่าวได้ว่าถ้าเราต้องการทราบตำแหน่งของอนุภาคที่แท้จริง เราก็ควรจะทำการวัดในแนวทางที่ Δx (ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่ง)ให้มีค่าเป็นศูนย์ เพื่อให้หลักความไม่แน่นอนเป็นจริงในกรณีนี้ Δv(ค่าความไม่แน่นอนของความเร็ว) ควรจะต้องมีค่าหนึ่งค่าใดก็ได้ไม่ได้จำกัดกัดอยู่ที่ค่าหนึ่งใด ค่าความเร็วควรจะมีค่าหนึ่งค่าใดที่วัดค่าตำแหน่งได้แน่นอน หรือเราอาจวัดความเร็วได้แน่นอน หรือทั้งสองอย่างดังกล่าวที่ระดับความละเอียดที่ปรับชดเชยกันได้ โดยสรุปหลักความไม่แน่นอนกล่าวว่าเราไม่สามารถวัดทั้งสองอย่างได้ละเอียดที่เวลาเดียวกัน

เพราะหลักความไม่แน่นอนนักฟิสิกส์ได้อธิบายระบบกลศาสตร์ควอนตัมในเทอมของความน่าจะเป็น ถ้าเราไม่สามารถบอกได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่านั้นเท่านี้แล้ว เช่น 10 เมตรต่อวินาที เราก็ไม่สามารถที่จะทำนายได้ว่าอนุภาคจะอยู่ที่ใดอีก 10 วินาทีต่อมาได้อย่างละเอียด ด้วยเหตุผลนี้จึงจำเป็นต้องอธิบายพฤติกรรมของอนุภาคในเทอมชุดของโอกาสความน่าจะเป็น ในตัวอย่างนี้เราอาจกล่าวได้ว่าอีก 10 วินาทีต่อมาอนุภาคมีความโน้มเอียงที่จะไปอยู่ระยะห่างออกไป 20 เมตร แต่ก็มีโอกาสที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปเพียง 15 เมตร หรือมีโอกาสที่จะเคลื่อนออกไปถึง 30 เมตรเป็นต้น

ในทางกลศาสตร์ควอนตัมนั้นทุกอย่างถูกอธิบายในเทอมของสิ่งที่เรียกว่าเวฟฟังก์ชั่น (Wave function) ซึ่งSchrodinger ได้สร้างสมการที่เรียกว่า สมการคลื่นของสตรอนดินเจอร์ การประยุกต์ใช้สมการในแบบสามมิติกับอะตอมของไฮโดรเจนที่คิดให้ทั้งโมเมนตัมและพลังงาน เป็นแบบควอนตัมโดยที่เวฟฟังชั่นคล้ายกับคลื่นสำหรับอธิบายอิเลคตรอน โฟตอน หรืออนุภาคอื่นๆ ความสูงของคลื่นที่จุดเฉพาะหนึ่งวัดได้จากแมกนีจูดของเวฟฟังชั่นมีความสัมพันธ์กับค่าโอกาสที่จะพบอนุภาคที่จุดนั้น ดังนั้นถ้าหากมีคลื่นที่มียอดคลื่นระหว่างสองจุด กล่าวได้ว่ามีโอกาสที่จะพบอนุภาคมากที่สุดที่จุดกลางของคลื่น สำหรับที่มีโอกาสน้อยมากที่จะพบจะอยู่ที่ปลายทั้งสองข้าง

คุณสมบัติแบบคลื่นของอนุภาคและการอธิบายอนุภาคด้วยคลื่นแห่งโอกาสที่น่าจะเป็น ทำให้มีการทบทวนรากฐานของวิชาฟิสิกส์ แทนที่จะระบุสถานะของอนุภาคด้วยตำแหน่งตามเวลาหรือ ฟังก์ชั่นของเวลา แต่ในกลศาสตร์ควอนตัมอธิบายสถานะต่างๆด้วยเวฟฟังก์ชั่น และเราจะไม่สามารถที่จะทำนายได้อย่างถูกต้องว่าที่ใดที่อนุภาคจะเคลื่อนที่ไปตามฟังก์ชั่นของเวลา แต่เราสามารถที่จะทำนายเฉพาะโอกาสที่จะเคลื่อนที่จากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง

อนุภาคแบบคอวนตัมบางครั้งทำตัวแบบคลื่น โดยใช้อิเลคตรอนเป็นตัวอย่างที่มักคิดให้เหมือนกับลูกบอล โดยสภาพของสารซึ่งปกติจะคิดให้เป็นอนุภาคเพราะดูไม่ออกว่าจะเป็นคลื่นได้อย่างไร แต่มีสถานะการณ์จากการทดลองหลายอย่าง ที่ปกติพิจารณาจากการเคลื่อนที่คล้ายคลึงกับลูกกระสุนปืน ในสถานการณ์ทั่วไปอิเลคตรอนมีพฤติกรรมทำให้เกิดการสอดแทรก ซึ่งเป็นพฤติกรรมแบบคลื่น เช่นเมื่อให้อิเลคตรอนเคลื่อนที่ผ่านช่องแคบสองช่องที่อยู่ใกล้กัน และผ่านช่องแคบไปกระทบกับฉากหลังจะปรากฏแถบมืดสว่างที่เกิดจากการกระจุกตัวของอิเลคตรอน และทำนองเดียวกันเมื่อให้แสงผ่านช่องแคบแล้วให้กระทบฉากก็จะเกิดแถบมืดสว่างที่ความเข้มแตกต่างกัน การทดลองนี้สรุปได้ว่าอิเลคตรอนทำตัวแบบคลื่น

คลื่นควอนตัมบางครั้งทำตัวคล้ายกับอนุภาค มีหลักฐานมากมายที่แสดงให้เห็นว่าแสงเป็นคลื่น ในอีกด้านหนึ่งในการทดลองเรื่อง photoelectric effect ดูเหมือนแสงจะทำตัวเป็นอนุภาค ซึ่งอธิบายครั้งแรกโดยไอสไตย์ เมื่อให้แสงตกกระทบโลหะจะไปชนอิเลคตรอนให้หลุดออกจากแผ่นโลหะ อิเลคตรอนจะเริ่มหลุดออกจากโลหะอย่างรวดเร็วซึ่งเร็วเกินไปที่จะวัดได้ แม้แต่เครื่องมือทางอิเลคทรอนิคส์สมัยใหม่ หนทางเดียวที่จะอธิบาย

การปลดปล่อยอิเลคตรอน กล่าวได้ว่าอย่างน้อยที่สุดในเหตุการณ์นี้ แสงทำตัวเหมือนกับลูกบิลเลียดที่ไปชนกับอิเลคตรอนและดันให้อิเลคตรอนหลุดออกมาทันทีทันใด มากกว่าที่จะทำตัวแบบคลื่น-

การมีคุณสมบัติคู่ทั้งคลื่นและอนุภาค จะมีปัญหาหรือไม่ ในตอนต้นศตวรรษนักฟิสิกส์ได้สรุปประมวลว่าทุกอย่างไม่เป็นอนุภาคก็จะต้องเป็นคลื่น พฤติกรรมของสิ่งต่างๆในโลกควอนตัม การนำเสนอหรือกล่าวถึงทุกอย่างในรูปแบบที่เป็นกลุ่มก้อนหรือควอนตัม ไม่ว่าอิเลคตรอนจะทำตัวเป็นคลื่นหรืออนุภาคขึ้นอยู่กับชนิดของการทดลองที่ได้ทำจึงเป็นปัญหาของการมีคุณสมบัติคู่ของคลื่นและอนุภาค การมีคุณสมบัติคู่จริงแล้วไม่น่าจะมีปัญหาเพราะการคงอยู่ของการขัดแย้งในตัวเองนั้น เพียงแต่บอกให้เราทราบว่าจะต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นที่ไม่ถูกต้องอยู่บ้าง เราอาจประยุกต์ใช้ผิดประเภทในสถานะการณ์ใหม่ เพราะว่าในโลกของควอนตัมทุกอย่างไม่เป็นทั้งอนุภาคหรือคลื่น ทั้งอิเลคตรอนและ โฟตอนเป็นสิ่งที่มันเป็น เป็นสิ่งที่บางครั้งปรากฏต่อเราเป็นอนุภาค และบางครั้งเป็นคลื่น และในความเป็นจริงจะเป็นชนิดของสิ่งที่สามที่เรายังไม่เคยมีประสบการณ์โดยตรงเกี่ยวกับเรื่องนี้มาก่อน

ด้วยเครื่องมืออิเลคทรอนิคส์สมัยใหม่อาจจัดสถานะการณ์การยิงอนุภาคจากเครื่องมือ และขณะที่อนุภาคกำลังเคลื่อนที่อยู่นั้น จะเลือกให้เป็นสภาพการทดลองเหมือนคลื่นหรือสภาพเหมือนอนุภาค ยากที่ให้อนุภาคเปลี่ยนสภาพตัวเองให้เครื่องมือตรวจจับได้ ต่อเมื่อการทดลองเสร็จได้ผลคำทำนายโดยอาศัยกลศาสตร์ควอนตัมพฤติกรรมแบบคลื่นจะอยู่ในการทดลองสภาพแบบคลื่น และพฤติกรรมแบบอนุภาคจะอยู่ในการทดลองสภาพแบบอนุภาค ทฤษฎีที่ใช้ถูกต้องแต่จะมองภาพอิเลคตรอนอย่างไรถ้าอิเลคตรอนมีพฤติกรรมเช่นนั้น

บอร์ได้ตั้งโมเดลของอะตอมที่มีอิเลคตรอนเคลื่อนที่อยู่รอบนิวเคลียส คุณสมบัติคู่ของคลื่นอนุภาคสามารถนำมาอธิบายอะตอมของบอร์ การคงอยู่ของวงโคจรที่ยอมให้ได้ในอะตอมของบอร์ยังเป็นสิ่งลึกลับอยู่เมื่อโมเดลอะตอมของบอร์นำเสนอขึ้นในครั้งแรก กล่าวถึงวงโคจรเฉพาะที่ซึ่งคลื่นและอนุภาคสอดคล้องตรงกัน สำหรับวงโคจรที่ไม่ยอมให้เป็นได้นั้นอาจเป็นได้ว่าเมื่อมองอิเลคตรอนเป็นแบบอนุภาคที่มีสภาพคงตัวแต่เมื่ออิเลคตรอนเป็นคลื่นไม่สอดคล้องไม่เหมาะสมที่จะเป็น ในทางกลับกันอาจเป็นไปได้ว่ามีจุดหนึ่งเข้ากับสภาพที่เป็นคลื่นพอดี ขณะอนุภาคเคลื่อนที่เร็วเกินไปที่จะคงอยู่ในวงโคจร เฉพาะเมื่อทั้งสองแนวทางสอดรับกันเมื่อวงโคจรของอนุภาคคงตัวและเข้ากันได้กับสภาพเป็นคลื่นที่เราได้วงโคจรที่ยอมให้ได้ ดังนั้นวงโคจรอะตอมของบอร์จะไม่ให้ความแตกต่างว่า อิเลคตรอนเป็นอนุภาคหรือคลื่น

จุดเริ่มต้นของทฤษฎีควอนตัมจากปีค.ศ. 1900 จากข้อสมมุติฐานของแพลงค์เกี่ยวกับการ ให้พลังงานมีรูปแบบของควอนตัม(quantize)ของพลังงาน ในการแผ่รังสีของวัตถุดำ (black body radiation) แพลงค์ได้ศึกษาในเรื่องนี้เพื่อหาความหมายเชิงกายภาพที่แท้จริง เขาได้ใช้ความพยายามอย่างมากจนเป็นพื้นฐานให้เขาตั้งทฤษฎีควอนตัมขึ้นมาเป็นครั้งแรก โดยเขาได้คิดให้พื้นผนังของกล่องดำนั้นเป็นตัวสั่นกระเพื่อมหรือตัว ออสซิลเลเตอร์แบบฮาร์โมนิคที่สามารถที่จะดูดซึมและปลดปล่อยพลังงาน E สัมพันธ์กับความถี่ f ในการสั่นของตัวออสซิลเลเตอร์ จะได้ว่า $E = hf$ เมื่อ h เป็นค่าคงที่ของแพลงค์ จะเห็นได้ว่าสูตรพลังงานของแพลงค์สามารถอธิบายรูปร่าง สเป็คตรัมการแผ่รังสีของวัตถุดำได้ โดยใช้สูตรของคลื่น $c = f\lambda$ ดังนั้น $E = fh$ จะกลายเป็น $E = hc/\lambda$

ในปีคศ.1905 ไอสไตน์ได้รับเอาคอนเซ็ปท์การควอนไตซ์ (quantization) โดยการเสนอแนะไว้ว่า การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กอยู่ในลักษณะที่เป็นกลุ่มก้อนของพลังงาน (packets of energy) ได้ให้สูตรอีกรูปแบบหนึ่งจากสูตรของแพลงค์ จากการประยุกต์ใช้โมเดลของโฟตอนทำให้ไอสไตน์หาวิธีแก้ปัญหา photoelectric effect ซึ่งได้แก่ปรากฏการณ์ที่แสงทำตัวเป็นอนุภาคไปชน อิเลคตรอนที่ผิวของโลหะ ที่ไม่สามารถที่จะแก้ได้ด้วยฟิสิกส์แบบดั้งเดิม ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแบบดั้งเดิมนั้นทำนายพลังงานของแสงเป็นสัดส่วนกับเข้มของแสง โดย

เป็นอิสระต่อความถี่แสง แต่หลักฐานจากการทดลองชี้ให้เห็นในทางที่ตรงกันข้าม ไอสไตน์จึงได้ยืนยันว่า ถ้าแสงหรือการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใดประกอบด้วยกระแสของโฟตอนที่มีพลังงาน hf – แล้วค่าพลังงานสูงสุดที่อิเลคตรอนตัวหนึ่งสามารถที่จะดูดกลืนในการชนกับโฟตอนจะต้องมีค่าเท่ากับ hf ด้วย เมื่อพิจารณาที่อิเลคตรอนแล้วจะมีพลังงานบางส่วนที่อิเลคตรอนต้องการเพื่อที่จะหลุดออกจากผิวของโลหะ ขณะนี้เรียกกันว่า work function ϕ ไอสไตน์จึงได้ตั้ง postulate ไว้ว่า พลังงานจลน์สูงสุดของอิเลคตรอนที่หลุดออกจากผิวโลหะเป็นตามสมการดังนี้

$$KE_{max} = hf - \phi$$

จากสูตรนี้มิลิแกนได้พิสูจน์ยืนยันว่าถูกต้องทำให้ไอสไตน์ได้รับรางวัลโนเบล

ในปี 1913 บอร์ได้ขยายขอบเขตคอนเซ็ปท์การควอนไตซ์ของพลังงานกับไฮโดรเจนอะตอม จากงานของรัทเทอร์ฟอร์ดในการทดลองยิงอนุภาคแอลฟ่าไปยังอะตอม อะตอมทำให้อนุภาคแอลฟ่าเบี่ยงเบนไป (scattering) นำไปสู่คอนเซ็ปท์อะตอมที่มีขนาดเล็กมาก ที่ใจกลางเป็นนิวเคลียสแข็งและมีอิเลคตรอนเคลื่อนที่อยู่โดยรอบ เมื่อพิจารณาเส้นสเป็กตรัมของของไฮโดรเจนอะตอม ทำให้บอร์รับเอาแนวคิดเรื่องนิวเคลียสอะตอมของรันเทอร์ฟอร์ดที่มีนิวเคลียสเป็นแกนกลางอิเลคตรอนเคลื่อนที่โดยรอบ สำหรับเงื่อนไขให้มีการเคลื่อนที่ได้อย่างคงตัว จะพิจารณาแรงดึงดูดทางไฟฟ้าสถิตระหว่างอิเลคตรอนกับนิวเคลียส ทำให้มีการใช้แรงหนีออกจากศูนย์กลางนอกจากแรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่เป็นแรงดูด ซึ่งตามโมเดลนี้ไม่สามารถอธิบายโดยทฤษฎีดั้งเดิมเนื่องจากอิเลคตรอนที่มีความเร่งควรจะแผ่รังสีพลังงานและเคลื่อนที่แบบ spiral เข้าสู่นิวเคลียส เพื่อให้ได้ชุดของวงโคจรที่คงตัวแบบ discrete ไม่ต่อเนื่องแบบฟิสิกส์ดั้งเดิม บอร์ได้ตั้ง postulate อันเป็นข้อตกลง โดยไม่มีคำอธิบายที่ชัดเจนคือ อิเลคตรอนอยู่ในพื้นที่จำกัดของสถานะคงตัวหนึ่ง โดยทางโคจรเป็นรูปวงกลม และปลดปล่อยพลังงานจากการแผ่รังสีเฉพาะเมื่อมีการเปลี่ยนสถานะคงตัวของวงโคจรหนึ่งไปยังอีกสถานะของวงโคจร คอนเซ็ปท์ของการเปลี่ยนจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง อธิบายได้ว่าอะตอมจะปลดปล่อยโฟตอนตัวหนึ่งที่มีพลังงานเท่ากับความแตกต่างระหว่างพลังงานของวงโคจร ตัวอย่างเช่นการเปลี่ยนสถานะระหว่างสถานะที่ถูกกระตุ้น E2 และระดับพื้น (ground state) E1 ควรจะปลดปล่อยโฟตอนมีพลังงาน hf นั่นคือ $E2 - E1 = hf$

จะเห็นว่าการศึกษากลศาสตร์ควอนตัมในตอนแรกๆขึ้นอยู่กับความคิดทางกลศาสตร์ของ นิวตัน และพยายามที่จะเสริมเพิ่มเงื่อนไขการควอนไตซ์เข้าไปในกฎของนิวตันซึ่งใช้ได้บางส่วนในแบบอะตอมของบอร์ ต่อมาภายหลังการยังคงเกี่ยวข้องกับกลศาสตร์แบบนิวตันไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ก้าวแรกที่ออกห่างไปจากกลศาสตร์ของนิวตัน จากแนวคิดของเดอบรอยล์ที่กล่าวว่าอนุภาคมีคุณสมบัติของคลื่นด้วยแนวคิดนี้คิดให้สสารทุกชนิดมีคุณสมบัติของคลื่น เดอบรอยล์ได้ตั้ง postulate ไว้ว่าความถี่ของคลื่นที่สัมพันธ์กับอนุภาคมีความสัมพันธ์กับพลังงานของอนุภาคนั้น ด้วยสมการเดียวกันกับพลังงานของโฟตอน $E = hf$ และความยาวคลื่นของอนุภาคที่เกี่ยวข้องกับ โมเมนตัมจะได้ความยาวคลื่นของอนุภาคเป็น $\lambda = h/P$

จากแนวคิดต่าง ๆที่กล่าวมาแล้วเป็นสาระสำคัญในการพัฒนากลศาสตร์ควอนตัมที่ใช้เวฟฟังชั่นมาใช้อธิบายพฤติกรรมของอนุภาคเช่นอิเลคตรอนได้ดีกว่า และมีการพัฒนาต่อเนื่องมาจนในปัจจุบัน

เอกสารอ้างอิง

James, T.1992. **1001 Things Everyone Should Know About Science** Bantam Doubleday Dell Publishing Group Inc.

Gren,I. 2000. **Physics Education**. 35(6),381-385.