ทฤษฎีอินซีเดนซ์
(Theory of Incidence)

เรียบเรียงโดย อาจารย์เอมอร สิทธิรักษ์

1.1 มโนทัศน์ของอินซีเดนซ์ (The Concept of Incidence)

อินซีเดนซ์เป็นความคิดเบื้องต้นที่ใช้ผ่านคำบางคำ เช่น ความสัมพันธ์อินซีเดนซ์ (incidence relation) กล่าวถึง "จุดอยู่บนเส้น" เหมือนกับการกล่าวว่า จุดวางบนเส้น จุดอยู่ในเส้น เส้นผ่านจุด หรือ ข้อความที่ว่า "จุดอยู่ใน หรือ อยู่บนระนาบ" "เส้นวางอยู่ในระนาบ" "เส้นสองเส้นพบกัน" ล้วนเป็นความสัมพันธ์อินซีเดนซ์

ความสัมพันธ์อินซีเดนซ์แสดงถึงลักษณะความสัมพันธ์พื้นฐานของ จุด เส้น และระนาบ เราใช้คำว่า อินซีเดนซ์เมื่อกล่าวถึง จุดอยู่บนเส้น ว่า จุดอินซีเดนซ์กับเส้น หรือ จุดกับเส้นอินซีเดนซ์ซึ่งกันและกัน ในทำนองเดียวกัน จุดอยู่ในระนาบ ว่า จุดอินซีเดนซ์กับระนาบ หรือ ระนาบอินซีเดนซ์กับจุด หรือ จุดกับระนาบอินซีเดนซ์ซึ่งกันและกัน และในทำนองเดียวกัน กับ เส้นอยู่ในระนาบ

นอกจากความสัมพันธ์เบื้องต้นทั้ง 3 ข้างบนแล้ว ยังมีความสัมพันธ์อินซีเดนซ์อื่นๆ ดังนี้ เส้นสองเส้นพบกัน กล่าวได้ว่า เส้นสองเส้นอินซีเดนซ์ที่จุดเดียวกัน เส้นสองเส้นขนานกัน กล่าวได้ว่า เส้นสองเส้นอินซีเดนซ์บนระนาบเดียวกัน แต่ไม่มีจุดที่อินซีเดนซ์ร่วมกันของเส้นทั้งสอง จุดสองจุดกำหนดเส้นๆ หนึ่ง กล่าวได้ว่า จุดสองจุดอินซีเดนซ์ด้วยเส้นบางเส้น และมีเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

สมบัติเบื้องต้นของอินซีเดนซ์ที่เกี่ยวข้องอยู่ในทฤษฎีบทต่างๆ ในเรขาคณิต มีอยู่ 2 ประการ คือ

1. ความสัมพันธ์อินซีเดนซ์เป็นความสัมพันธ์สมมาตร เช่น ถ้าจุดๆ หนึ่งอินซีเดนซ์กับเส้นๆ เส้นหนึ่งแล้วเส้นๆ นั้นจะอินซีเดนซ์กับจุดๆ นั้น
2. ถ้าจุดๆ หนึ่งอินซีเดนซ์กับเส้นๆ หนึ่งและเส้นนั้นอินซีเดนซ์กับระนาบหนึ่งแล้วจุดนั้นก็ จะอินซีเดนซ์กับระนาบนั้นด้วย

1.2 อินซีเดนซ์ในความหมายของเซต

ในวิชาเรขาคณิตเรากล่าวถึง จุด เส้น ระนาบ ในเซตเรากล่าวถึง เซต สมาชิก สับเซตเพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาอินซีเดนซ์ในความหมายของเซตน่าจะได้ เช่น เส้นประกอบด้วยจุด เหมือนกับเส้นเป็นเซตของจุด เซตของจุดทุกจุดอินซีเดนซ์กับเส้น

เส้นๆ หนึ่งอินซีเดนซ์กับระนาบๆ หนึ่ง เราได้ว่าแต่ละจุดในเส้น คือ จุดในระนาบ นั่นคือ ถ้าเส้นอยู่ในระนาบ เส้นนั้น คือสับเซตของระนาบนั่นเอง

ดังนั้นเราสามารถอธิบายความ สัมพันธ์อินซีเดนซ์โดยความหมายของเซตได้ดังนี้

1. จุดๆ หนึ่งอยู่ใน หรือ เป็นสมาชิกของเส้นหนึ่ง สมมูลกับ เส้นๆ หนึ่งมีจุดๆ หนึ่งเป็นสมาชิก

2. จุดๆ หนึ่งอยู่ในหรือเป็นสมาชิกของระนาบหนึ่ง สมมูลกับ ระนาบๆ หนึ่งมีจุดๆ หนึ่งเป็นสมาชิก

3. เส้นๆ หนึ่งอยู่ในระนาบๆ หนึ่ง สมมูลกับ ระนาบๆ หนึ่งมีเส้นๆ หนึ่งเป็นสมาชิก

1.3 สัจพจน์สำหรับอินซีเดนซ์ (Postulates for Incidence)

ต่อไปเราจะพัฒนาเรขาคณิตโดยกำหนดสัจพจน์ที่เกี่ยวข้องกับอินซีเดนซ์ของ จุด เส้น และระนาบ เพื่อนำไปสู่การสร้างทฤษฎีบทต่อไป ซึ่งสัจพจน์ที่เสนอต่อไปนี้จะเป็นสมบัติของอินซีเดนซ์ที่เราคุ้นเคยของ จุด เส้น และระนาบ ในระนาบยุคลิดและเรขาคณิตรูปทรงตัน (Solid geometry) ดังต่อไปนี้

สัจพจน์ 1.1 (Extension) เส้นเป็นเซตของจุดที่ประกอบด้วยจุดอย่างน้อยสองจุด

สัจพจน์ 1.2 (Determination) จุดสองจุดที่แตกต่างกันจะมีเส้นเพียงเส้นเดียวเท่านั้นผ่าน

สัจพจน์ 1.3 (Extension) ระนาบเป็นเซตของจุดที่ประกอบด้วยจุดอย่างน้อยสามจุดที่ไม่เป็นสมาชิกของเส้นเดียวกัน

สัจพจน์ 1.4 (Determination) จุดสามจุดที่แตกต่างกันและไม่ใช่สมาชิกของเส้นเดียวกันจะเป็นสมาชิกของระนาบๆ เดียวเท่านั้น

สัจพจน์ 1.5 (Linearity) ถ้าจุด 2 จุดที่แตกต่างกันของเส้นๆ หนึ่งอยู่ในระนาบๆ หนึ่งแล้วเส้นๆ นั้นต้องอยู่ในระนาบนั้นด้วย (หมายถึงจุดทุกจุดของเส้นอยู่ในระนาบด้วย)

สัจพจน์ 1.6 (Dimensionality) ถ้าระนาบสองระนาบมีจุดร่วมกันหนึ่งจุดแล้วระนาบทั้งสองย่อมมีจุดที่สองเป็นจุดร่วมด้วย

หมายเหตุ 1. คำว่า จุดสองจุดและจุดสองจุดที่แตกต่างกันมีความหมายที่ไม่เหมือนกัน จุดสองจุดอาจเป็นจุดเดียวกันได้แต่จุดสองจุดที่แตกต่างกัน หมายถึง สองจุดนั้นเป็นจุดเดียวกันไม่ได้ เพราะฉะนั้น ถ้าเราต้องการพิจารณาว่าแตกต่าง จะใส่คำว่าแตกต่างกันลงไปด้วย เช่น เส้นสามเส้นที่แตกต่างกัน ระนาบสองระนาบที่แตกต่างกันเป็นต้น

2. สัจพจน์ 1.1 กล่าวถึงสมบัติของเส้น 2 ประการเท่านั้น คือ เส้นเป็นเซตของจุด และมีจุดสองจุดที่แตกต่างกัน แต่ไม่ได้กล่าวถึงว่าบทกลับของมันเป็นจริง ซึ่งเราใช้ความหมายนี้กับสัจพจน์ 1.3 ด้วย นอกจากนี้การที่บอกว่าเส้นมีจุดสองจุดที่แตกต่างกันเท่านั้นไม่ได้หมายความว่ามีจุดไม่จำกัด หรือเท่ากับสาม การที่จะบอกว่ามีจุดไม่จำกัดเราควรจะได้จากการนิรนัยมาจากสัจพจน์ที่กำหนด (ถ้าเป็นไปได้)

3. สัจพจน์ 1.2 และ 1.4 เป็นสัจพจน์ที่กล่าวถึงการเกิดเส้นและการเกิดระนาบ เช่น ถ้า a , b เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกัน จะมีเส้น L หนึ่งเส้นซึ่ง a , b เป็นสมาชิกของ L

4. สัจพจน์ 1.5 บอกว่าระนาบ คือ linear เป็นสัจพจน์ที่บอกให้ทราบว่าระนาบแตกต่างไปจาก ทรงกลม โคน หรือพื้นผิวอื่นๆ

5. สัจพจน์ 1.6 ใน เรขาคณิตรูปทรงตัน กล่าวว่า "ถ้าระนาบสองระนาบในมิติ (Space) มีจุดๆ หนึ่งร่วมกันแล้วจะมีจุดมีสองร่วมกันด้วย" คำว่า มิติในที่นี้แทน 3 มิติ มีนักคณิตศาสตร์ ได้ทำการพิสูจน์ว่า ถ้าระนาบสองระนาบใน 4 มิติ มีจุดๆ หนึ่งร่วมกันแล้วจะมีจุดที่สองร่วมกันด้วย ปรากฏว่าไม่เป็นจริง สรุปได้ว่า จะมีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้น สัจพจน์ 1.6 เป็นการยืนยัน ว่าเราขาคณิตที่เราจะพูดต่อไปนี้สูงสุดแค่ในสามมิติ

6. คำอนิยามของเราในที่นี้ที่เป็นพื้นฐานคือ จุด เส้น และระนาบ การศึกษาเรขาคณิตก็ควรจะศึกษาสมบัติคำพวกนี้จากสัจพจน์เท่านั้น

1.4 ทฤษฎีบทเบื้องต้นในอินซีเดนซ์ (Elementary Theorems on Incidence)

จากสัจพจน์ที่กำหนดจาก 1.1–1.6 ต่อไปจะนำไปพัฒนาทฤษฎีบทในอินซีเดนซ์ ด้วยการเริ่มจากทฤษฎีบทเบื้องต้นเพื่อความเข้าใจในสมบัติต่างๆ ก่อนอื่นขอตกลงในสัญลักษณ์ที่จะนำมาใช้ดังข้างล่างนี้

a , b , c , d	แทนจุดต่างๆ อาจจะมี subscripts ในบางครั้ง
L , M , N	แทนเส้น
P , Q , R	แทนระนาบ
" = "	แทนการเป็นอันเดียวกัน
" # "	แทนการแตกต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 1.1 เส้นสองเส้นใดๆ ที่แตกต่างกัน มีจุดอย่างมากหนึ่งจุดที่ร่วมกัน

บทนิยามที่ 1.1 ถ้า a และ b เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกัน เราใช้สัญลักษณ์ ab แทน เส้นเพียงเส้นเดียวที่ผ่านจุด a , b และเรียกว่า เส้น ab

หมายเหตุ จากบทนิยามเส้น ab คือเส้นที่กำหนดโดย a และ b และ a , b อยู่ใน ab

บทนิยามที่ 1.2 จุด a1 , a2 ,..., an เรียกว่าร่วมเส้นเดียวกัน (Colline or Collinear) ถ้ามีเส้นๆ หนึ่งผ่านจุดเหล่านี้ทั้งหมด

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ถ้าจุด a ไม่ได้อยู่ในเส้น bc แล้ว a , b , c เป็นจุดสามจุดที่แตกต่างกันและไม่ร่วมเส้นเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 1.3 เส้นๆ หนึ่ง และ จุดๆ หนึ่งที่ไม่อยู่ในเส้นนั้นจะอยู่ในระนาบหนึ่งและระนาบเดียวเท่านั้น

บทนิยามที่ 1.3 ให้จุด a ไม่อยู่ในเส้น L แล้ว จะมีระนาบเพียงหนึ่งระนาบเท่านั้นที่บรรจุเส้น L และ a ซึ่ง เรียกว่า ระนาบที่กำหนดโดย L และ a หรือ ระนาบของ L และ a เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ La

ในทำนองเดียวกัน ถ้า a , b , c เป็นจุดสามจุดที่แตกต่างกัน และ ไม่ร่วมเส้นเดียวกัน จะมีระนาบเพียงหนึ่งระนาบเท่านั้นที่บรรจุ a , b , c ซึ่งเรียกว่า ระนาบที่กำหนดโดย a , b , c เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ abc

หมายเหตุ เราจะไม่นิยาม La ถ้า a อยู่ใน L ทำนองเดียวกันก็จะไม่นิยาม abc ถ้า a , b , c ไม่ใช่จุดที่แตกต่างกัน หรือ a ,b , c อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน

ในทฤษฎีของอินซีเดนซ์ มโนทัศน์เกี่ยวกับการขนาน (parallelism) เป็นหัวข้อที่สำคัญจึงขอเสนอบทนิยาม ทฤษฎีบท บทแทรก เพื่อความเข้าใจและเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อไป

บทนิยามที่ 1.4 ถ้าเส้น L และ M เป็นเส้นสองเส้นที่อยู่ในระนาบเดียวกันและไม่มีจุดร่วมกันแล้วเส้น L และ M ขนานกัน เขียนแทนด้วย L // M

หมายเหตุ จากบทนิยามการขนานยังไม่ได้รับประกันการมีจริง (exist) ของ เส้นขนาน เราจะแทนข้อความที่ว่าเส้น L และ M อยู่ในระนาบเดียวกัน และไม่มีจุดร่วมกัน ด้วยข้อความที่ว่า L และ M ขนานกัน

บทแทรก ถ้าเส้น L // M แล้ว จะมีระนาบเพียงระนาบเดียวกันเท่านั้น ที่ L และ M อยู่ในระนาบนี้

บทนิยามที่ 1.5 ถ้า S และ T เป็นรูป (เซตของจุด) ที่มีจุดร่วมกันหนึ่งจุด เราพูดว่า S และ T พบกันหรือ ตัดกัน (intersect) ถ้า S และ T มีจุด a เป็นจุดร่วม เราเรียกว่า S และ T พบกันหรือตัดกันที่จุด a และเซตของจุดร่วมทั้งหลายของ S และ T เรียกว่า อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของ S และ T

หมายเหตุ บางครั้ง S และ T มีจุดร่วมกันหลายจุด จนกระทั่ง S = T อาจเกิดขึ้นได้

ทฤษฎีบทที่ 1.4 ถ้าเส้นสองเส้นที่แตกต่างกันตัดกันแล้วเส้นทั้งสองนี้ต้องอยู่ในระนาบเพียงระนาบเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่ 1.5 ถ้าระนาบสองระนาบที่แตกต่างกันตัดกันแล้วอินเตอร์เซกชันของทั้งสองระนาบนี้คือ เส้น

บทแทรก ถ้าเส้นๆ หนึ่งอยู่ในระนาบทั้งสองระนาบที่แตกต่างกันแล้ว เส้นนั้น คือ อินเตอร์เซกชันของระนาบสองระนาบนี้

1.6 การขนานของระนาบและการขนานของเส้น

เราจะเริ่มด้วยการให้บทนิยามที่เราคุ้นเคยมาก่อน ดังนี้

บทนิยามที่ 1.6 ระนาบสองระนาบ P และ Q เรียกว่า ขนานกัน ถ้าไม่มีจุดร่วมกันเลย เขียนแทนด้วย P // Q

ต่อไปเราจะพิสูจน์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างการขนานของระนาบและการขนานของเส้น

ทฤษฎีบทที่ 1.6 ถ้าระนาบ P // Q และมีระนาบ R ที่ตัดกับ P และ Q แล้วอินเตอร์เซกชัน ที่เกิดจากการตัดกันระหว่าง R และ P กับ R และ Q จะเป็นเส้นขนานกัน

บทนิยามที่ 1.7 เส้น L1 , L2 ,...,Ln เรียกว่า จวบกัน (concur or to be concurrent) ถ้ามีจุดที่ร่วมกันจุดหนึ่ง รูป S1 , S2 ,... , Sn เรียกว่า ร่วมระนาบ (Coplane or to be coplanar) ถ้าทุกๆ รูป อยู่ในระนาบๆ หนึ่ง

ทฤษฎีบทที่ 1.7 ถ้าเส้นสามเส้นใดๆ อยู่ร่วมระนาบกันเป็นคู่ๆ แต่ไม่ได้อยู่ร่วมระนาบเดียวกันทั้งสามเส้น แล้วเส้นทั้งสามจะจวบกันหรือไม่ก็ขนานกันเป็นคู่ๆ

บทแทรก ถ้าเส้น L // M และ a เป็นจุดที่ไม่อยู่ในระนาบของ L และ M แล้ว จะมีเส้น N เพียงเส้นเดียวเท่านั้นบรรจุ a โดยที่ N // L และ N // M

หมายเหตุ 1. การสร้างรูปเป็นเพียงการช่วยให้เห็นภาพในการพิสูจน์เท่านั้น ไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของการพิสูจน์

2. บทนิยามการขนานจะถือได้ว่า L // M อยู่ในระนาบเดียวกัน

1.6 ทฤษฎีบทการมีจริง (Existence Theorems)

ในการเรียนเรขาคณิต การพิสูจน์เรามักจะกล่าวข้อความต่อไปนี้เสมอ เช่น ให้เส้น L อยู่ในระนาบ P เลือกจุดๆ หนึ่งใน P และไม่อยู่ใน L แน่นอนการเลือกจุดไม่ใช่สิ่งที่เราสามารถทำได้ในการให้เหตุผลเชิงนามธรรม เพราะจุดไม่ใช่ส้มในตลาดที่เรามองเห็นและเลือกซื้อ เราจึงจำเป็นต้องมีข้อความที่หมายถึงว่า มีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดตามสมบัติที่

กำหนดให้อยู่จริงเมื่อนำไปใช้ในการหาสมบัติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นในการศึกษาทฤษฎีบทในเรขาคณิต เราต้องแสดงว่ามีจุดตามสมบัติที่กำหนดให้ จึงสมควรที่จะมีการพิสูจน์ทฤษฎีบทการมีจริงเสียก่อน

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะต่อเนื่องจากสัจพจน์ 1.3

ทฤษฎีบทที่ 1.8 ในระนาบ P ถ้าให้ L เป็นเส้นๆ หนึ่งใน P แล้วจะมีจุดหนึ่งจุดใน P ที่ไม่อยู่ใน L

ทฤษฎีบทที่ 1.9 ในระนาบใดๆ มีเส้นสามเส้นที่แตกต่างกันซึ่งเป็นเส้นที่ไม่จวบกัน
บทแทรกที่ 1 P เป็นระนาบๆ หนึ่งให้ a เป็นจุดใน P แล้วจะมีเส้นหนึ่งเส้นใน P ที่ไม่ผ่าน a (a อยู่ในเส้นทั้งสอง)
บทแทรกที่ 2 ให้ P เป็นระนาบๆ หนึ่ง a เป็นจุดใดๆ ใน P จะมีเส้นอย่างน้อยสองเส้นที่ผ่าน a (a อยู่ในเส้นทั้งสอง)
บทนิยามที่ 1.8 เส้นสองเส้นที่แตกต่างกันและไม่อยู่ร่วมระนาบเดียวกัน เรียกว่า เส้นทั้งสองไขว้ข้าม (Skew) ซึ่งกันและกัน

ทฤษฎีบทที่ 1.10 ถ้ามีจุดสี่จุด คือ a , b , c , d ที่แตกต่างกันโดยที่ไม่ร่วมเส้น และไม่ร่วมระนาบกันแล้ว

(i.) เมื่อกำหนดระนาบๆ หนึ่ง จะมีจุดๆ หนึ่ง ที่ไม่อยู่ในระนาบนี้
(ii.) เมื่อกำหนดเส้นๆ หนึ่ง จะมีเส้นๆ หนึ่ง ที่ไขว้ข้ามกับเส้นนี้
(iii.) เมื่อกำหนดจุดๆ หนึ่ง จะมีระนาบๆ หนึ่ง ที่ไม่บรรจุจุดนี้
(iv.) มีเส้นอย่างน้อย 6 เส้น และระนาบอย่างน้อย 4 ระนาบ

เอกสารอ้างอิง

ประสิทธิ์ ทองแจ่ม. **รากฐานเรขาคณิต**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูสกลนคร สกลนคร 2526

Prenowitz, W. and Jodan, M. **Basic Concepts of Geometry**. John wiley and Sons, Inc. 1965

Hilbert, D. **Foundations of Geometry**. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois. 1971

Wolfe, E. Harold. **Introduction to Non – Euclidean Geometry**. The dryden press,Inc. 1945